

تعریف تناسب مستقیم و معکوس

در کتاب ریاضی (۱) دهم فنی و حرفه‌ای

ریاضی در تمام رشته‌ها و همه عرصه‌های زندگی به‌ویژه در صنعت دارد، منافات دارد. مجهز نبودن دانش‌آموزان نسبت به پیش‌نیازهای ریاضی، مؤلفان کتاب‌های ریاضی گروه فنی و حرفه‌ای و کاردانش را بر آن داشته که در این کتاب‌ها، بیش از سایر کتاب‌های درسی ریاضی، با برجسته کردن زوایای پنهانی ریاضی و پررنگ کردن جنبه‌های کاربردی آن، یادگیری ریاضی را محدود به خواندن و شنیدن مفاهیم ریاضی نکنند، بلکه با آوردن متن‌هایی داستان گونه، مسائل را طرح کنند و با انجام فعالیت‌ها، دانش‌آموزان را به درک مفهوم ریاضی مورد نظر، برسانند. بدین سبب، تمام کسانی که در عرصه تألیف کتاب‌های ریاضی مشغول به فعالیت هستند، در این مورد اتفاق نظر دارند که تألیف کتاب‌های ریاضی با این ویژگی‌ها، سخت‌تر از نوشتن کتاب‌هایی تنها با تمرکز بر ارائه مفاهیم بدون استفاده از زمینه‌هاست. کتاب ریاضی دهم فنی نیز، از جمله کتاب‌هایی است که نویسندگان محترم آن با ارائه مثال‌های کاربردی در قالب داستان‌هایی جذاب، سعی بر آن داشته‌اند که دانش‌آموز فنی را با ریاضی، هر چه بیشتر آشتی دهند. اما آنچه که به ذهن نویسنده مقاله می‌رسد، آن است که بیان ساده مفاهیم ریاضی و توجه به ضعف دانش‌آموزان، نباید باعث شود که مفاهیم بنیادین ریاضی، به صورتی ابهام‌آمیز تعریف شوند که گاه، بوی نادرستی از آن به مشام برسد. اتفاقی که در فصل اول کتاب ریاضی دهم فنی در دو مورد روی داده و ابهام آفرین شده است، مصداق این حرف است.

ابهام اول: اشتباهی رایج

موضوع به سطرهای دهم و یازدهم از صفحه ۱۴ کتاب درسی پایه دهم فنی، مربوط می‌شود.

چکیده

با وجود انواع کتاب‌های کمک آموزشی که اغلب غیراستاندارد هستند و شوربختانه هر روز شاهد تبلیغات وسیع آن‌ها در رسانه‌ها هستیم، کتاب‌های درسی جایگاه خود را به‌عنوان مهم‌ترین منبع تدریس حفظ کرده‌اند. لیکن از آنجا که هیچ قلمی از خطا مبرا نیست، گاهی در کتاب‌های درسی نیز، شاهد برخی ابهامات و خطاها هستیم. اهمیت این موضوع، انگیزه‌ای شد تا این مقاله را پس از مشورت با تعدادی از همکاران، با هدف بهبود و اصلاح بخشی از کتاب ریاضی (۱) پایه دهم فنی و حرفه‌ای ارائه نمایم. موضوع اصلی مقاله، تعریفی است که در قالب یک نکته، از مفهوم تناسب مستقیم و معکوس در فصل اول کتاب آمده است. بی‌شک ابهامات مطرح شده در این متن، چیزی از ارزش زحمات مؤلفان محترم آن نمی‌کاهد که نویسنده ضمن تشکر صمیمانه از این عزیزان، قصد اصلاح و دریافت راهنمایی دارد.

کلیدواژه‌ها: کتاب ریاضی (۱) دهم فنی، جرم، وزن، تعریف ریاضی، تناسب

مقدمه

از گذشته، این تصور در بین برخی خانواده‌ها رواج یافته بود و همچنان وجود دارد که فقط دانش‌آموزان ضعیف و اگر بخواهیم بدون رودربایستی بگوییم، آنانی که از درس خواندن فراری هستند، سراغ رشته‌های فنی می‌روند. این تصور هر قدر هم از لحاظ آماری درست باشد، چیزی از ارزش تحصیل در این رشته‌ها و امتیازات خاص این شاخه از علوم نمی‌کاهد و بسیاری دانش‌آموزانی که برحسب علاقه و استعدادشان، در این رشته‌ها مشغول تحصیل‌اند. با وجود این آمارها حاکی از آنند که بیشتر دانش‌آموزانی که به ادامه تحصیل در شاخه‌های فنی و حرفه‌ای یا کاردانش هدایت می‌شوند، از لحاظ علمی به‌خصوص در درس ریاضی، بنیة چندانی ندارند. چنین تصویری با نقش بنیادینی که

در حالی که وزن از جنس نیرو است و با واحدهایی مانند کیلوگرم، اندازه‌گیری می‌شود. در این حالت‌ها، مقدار نسبت، به واحدهای اندازه‌گیری برای هر کدام از کمیت‌های انتخاب شده، بستگی دارد.

متمايزند و بايد از هر گونه خطايي به دور باشند و اصولاً هيچ گونه ابهامي را برنمي‌تابند. ابهام دومي که نويسنده مقاله با آن روبه‌رو شده است و موضوع اصلي اين مقاله را تشکيل مي‌دهد، نکته‌اي است که در ابتدای صفحه ۲۶، با هدف تعريف و مقايسه تناسب مستقيم و معکوس آمده است.

نکته

در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر نیز افزایش (یا کاهش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطه مستقیم دارند؛ اما اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر کاهش (یا افزایش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطه معکوس دارند.

می‌دانیم اگر کمیت y در تناسب مستقیم با x باشد، عددی حقیقی چون K موجود است به طوری که $y = K \cdot x$. به وضوح اگر K مثبت باشد با افزایش یا کاهش مقدار متناظر x ، مقدار متناظر کمیت y نیز، به ترتیب افزایش یا کاهش می‌یابد. ولی در مورد K های منفی، وضعیت چنین نخواهد بود. در حالت کلی فرض کنیم $K < 0$ ، x_1 و x_2 با شرط $x_2 > x_1$ دو مقدار متناظر برای کمیت x و y_1 و y_2 به ترتیب مقادیر متناظر کمیت y به ازای x_1 و x_2 باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow Kx_2 < Kx_1 \Rightarrow y_2 < y_1$$

یعنی با افزایش x در حالت $K < 0$ ، مقدار y کاهش می‌یابد. به همین نحو، برای K های منفی می‌توان افزایش مقدار y را در پی کاهش مقدار x بررسی نمود. پس به نظر می‌رسد در نکته مطرح شده در صفحه ۲۶ کتاب، خطایی رخ داده است. اجازه دهید برای حالت خاص $y = -3x$ ، جدولی تشکیل دهیم تا کاهش y را در پی افزایش x به نمایش بگذاریم.

x	y	↑ x ↓	↓ y ↑
1	-3		
2	-6		

$y = -3x$:

حال به بحث تناسب معکوس می‌پردازیم. می‌دانیم اگر کمیت y در تناسب معکوس با x باشد، عددی حقیقی چون K موجود است به طوری که $y = \frac{K}{x}$. در تناسب مستقیم با وارون x است. همانند تناسب مستقیم، وقتی K مثبت است، مشکلی با آنچه در نکته مطرح شده در کتاب درسی (در مورد تناسب معکوس) آمده، نخواهیم داشت زیرا با افزایش x ، y کاهش می‌یابد. و با کاهش x ، افزایش y را داریم. ولی برای K های منفی، وضعیت طور دیگری است. در حالت کلی فرض کنیم $K < 0$ ، x_1 و x_2 با شرط $x_2 > x_1$ دو مقدار

همچنین در پاورقی همین صفحه آمده است: «گرچه کیلوگرم واحد اندازه‌گیری جرم است، از آن به‌عنوان واحد رایج اندازه‌گیری وزن در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم.» در توضیح باید اشاره کرد که جرم، معادل واژه انگلیسی mass که در کتاب‌های ریاضی و فیزیک با حرف m نشان داده می‌شود، کمیتی «اسکالر» است و به مقدار ماده تشکیل دهنده یک جسم اطلاق می‌گردد و یکای سنجش آن در دستگاه بین‌المللی «SI»، کیلوگرم است. این در حالی است که وزن که معادل واژه لاتین weight است و با حرف w نشان داده می‌شود، کمیتی «برداری» است و عبارت از نیروی گرانشی وارد شده از طرف زمین به جسم است و یکای اندازه‌گیری وزن در «SI»، «نیوتن» است.

آنچه که به اصطلاح خطای رایج است، استفاده ناصحیح از واژه «وزن» به جای واژه «جرم» است. به‌عنوان مثال، وقتی گفته می‌شود «وزن این بسته شکلات ۲ کیلوگرم است»، مقصود جرم بسته است. در واقع این خطای رایج مشکلی هم ایجاد نمی‌کند. ولی کشاندن این گونه خطاهای رایج در کتاب‌های درسی، آن هم کتاب ریاضی، خالی از اشکال نیست. با این اوصاف، اشکال عبارت «وزن از جنس نیروست و با واحدهایی مانند کیلوگرم اندازه‌گیری می‌شود.» واضح است. چرا که «کیلوگرم» نمی‌تواند واحد مورد استفاده برای وزن باشد. هر چند همانطور که در سطر نهم آمده است، واژه «وزن میوه‌ها» هم اشتباه است.

در خصوص پاورقی نیز باید اشاره کرد که کمیتی که در زندگی روزمره از واحد کیلوگرم برای اندازه‌گیری آن استفاده می‌شود، «جرم» است نه «وزن». وزن یک جسم برابر حاصل ضرب جرم جسم در شتاب جاذبه زمین (g) است که آن را به‌طور تقریبی، $9/8$ در نظر گرفته می‌شود. پس اندازه عددی وزن یک جسم، حدود 10 برابر عدد مربوط به جرم آن است.

ابهام دوم: تعریف تناسب مستقیم و معکوس

همانگونه که می‌دانیم، تعریف‌ها در ریاضیات، نقشی کلیدی بازی می‌کنند و نقشی اساسی در گفتمان ریاضی دارند. در رویکرد رسمی به ریاضیات جایگاه ویژه‌ای دارند و توجه اکید به آن‌ها به‌ویژه در آموزش ریاضی، از ضرورت‌هاست. تعریف‌های ریاضی با تعریف‌های روزمره

متناظر برای کمیت x و y_1 و y_2 به ترتیب مقادیر متناظر کمیت y به ازای x_1 و x_2 باشند. خواهیم داشت:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{K}{x_2} > \frac{K}{x_1} \Rightarrow y_2 > y_1$$

یعنی با افزایش x در حالت $K < 0$ ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد. به همین ترتیب، برای K های منفی نیز می‌توان کاهش مقدار y را در پی کاهش مقدار x ، بررسی نمود، هر چند که با توجه به نابرابری‌های اخیر، نیازی به این بررسی نیست. با این اوصاف، نحوه معرفی تناسب معکوس هم، آن گونه که در نکته کتاب درسی آمده، اشکال دارد.

اجازه دهید برای حالت خاص $y = \frac{-4}{x}$ ، جدولی تشکیل دهیم تا افزایش y را به سبب افزایش x ، به نمایش بگذاریم.

$y = \frac{-4}{x}$:	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">y</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">۱</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-۴</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">۲</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-۲</td> </tr> </table>	x	y	۱	-۴	۲	-۲	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="margin-bottom: 5px;">↑</div> <div style="margin-bottom: 5px;">↑</div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="margin-bottom: 5px;">x</div> <div style="margin-bottom: 5px;">y</div> </div>
x	y								
۱	-۴								
۲	-۲								

نتیجه‌گیری

دیدیم که تعریف‌های تناسب‌های مستقیم و معکوس یا واژه‌های «افزایش، کاهش»، فقط برای K های مثبت می‌توانند تعریف‌های صحیحی باشند. ولی برای K های منفی، با این تعریف‌ها، به نادرستی و تناقض می‌رسیم. پس بهتر است که در کتاب درسی نیز، تناسب‌های مستقیم و معکوس به صورتی که در منابع معتبر آمده است، تعریف شوند.

منابع معتبر

ابتدا به فرهنگ لغات ریاضی آکسفورد (منبع [۲]) می‌رویم تا ببینیم در آن، واژه «proportion» (معادل واژه تناسب)، چگونه تعریف شده است. در اینجا ترجمه متن را می‌آوریم و خواننده علاقمند را برای مشاهده متن اصلی، به منبع شماره ۲ این مقاله، ارجاع می‌دهیم.

فرهنگ لغات ریاضی آکسفورد صفحه ۶۳۹:

اگر رابطه بین دو کمیت x و y به صورت $y = Kx$ باشد، که K ثابت است، گفته می‌شود y در تناسب مستقیم با x است که اغلب به صورت $y \propto x$ نموده می‌شود. K ثابت تناسب نامیده می‌شود. همچنین گفته می‌شود، y نسبت به x به‌طور مستقیم تغییر می‌کند. نمودار y بر حسب x در این حالت، خط راست مار بر مبدأ است.

اگر $y = \frac{K}{x}$ باشد، y با x به‌طور معکوس متناسب است که اغلب به صورت $y \propto \frac{1}{x}$ نشان داده شده و گفته می‌شود، y نسبت به x ، به‌طور معکوس تغییر می‌کند.

حال به سراغ کتاب «Ratios and Proportion» (نسبت و تناسب)، که منبع معتبر دیگری است، می‌رویم. در صفحه‌های ۳۵ و ۳۶ این کتاب، چنین آمده است:

تناسب مستقیم زمانی رخ می‌دهد که بین چهار مقدار a, b, c و d ($d \neq 0, c \neq 0, b \neq 0, a \neq 0$)، تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ برقرار باشد. در این صورت اگر $c = a \times m$ (در a ضرب شود، $m \neq 0$)، آنگاه $d = b \times m$ (نیز در b ضرب شود) یا اگر $c = a \div m$ (در a تقسیم شود، $m \neq 0$)، آنگاه $d = b \div m$ (هم در b تقسیم شود).

تناسب معکوس زمانی رخ می‌دهد که بین چهار مقدار a, b, c و d ($d \neq 0, c \neq 0, b \neq 0, a \neq 0$)، تساوی $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ برقرار باشد. در این صورت اگر $c = a \times m$ (در a ضرب شود، $m \neq 0$)، آنگاه $d = b \div m$ (در b تقسیم شود) یا اگر $c = a \div m$ (در a تقسیم شود، $m \neq 0$)، آنگاه $d = b \times m$ (در b ضرب شود).

همانگونه که مشاهده می‌شود، در این منابع از واژه‌های «افزایش و کاهش» که ابهام‌آفرین هستند، خبری نیست. در واقع در این منابع، y با x در تناسب مستقیم دانسته شده است، اگر با m برابر شدن x ، y نیز m برابر شود و در تناسب معکوس، با m برابر شدن x ، y بر m تقسیم می‌شود. ولی در منابع کم معتبر نمونه‌هایی هستند که مانند کتاب ریاضی (۱) پایه دهم فنی، از واژه‌های Increase و Decrease به معنای افزایش و کاهش سخن به میان آمده است.

پرسش

پرسشی که مطرح می‌شود این است که مگر پدیده‌ای طبیعی وجود دارد که در آن، دو کمیت با ثابت منفی در تناسب باشند؟ راستش را بخواهید، خود نویسنده نیز با این پرسش روبه‌رو بود که پس از بررسی، به نمونه‌هایی چون «حرکت کند شونده با شتاب ثابت» و «تیروی کشسانی فنر» دست یافت. هر چند واژه‌های «افزایش و کاهش» در خصوص تفسیر نتایج این نمونه‌ها نیز، ابهام‌آفرین هستند. از طرفی حتی عدم وجود پدیده‌ای واقعی، نمی‌تواند توجیهی برای یک تعریف ناقص و نادرست باشد.

در پایان، نویسنده بار دیگر ضمن ارج نهادن به زحمات مؤلفان محترم کتاب، از ایشان درخواست راهنمایی دارد.

پی‌نوشت

- بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ پناهنده، سوسن؛ دهقانی‌ایبانه، زین‌العابدین و فانی، زیبا. (۱۳۹۶). ریاضی (۱) پایه دهم، دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی‌وحرفه‌ای و کار دانش، چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

منبع

- Ben-Chaim, D.; Keret, Y. I.; & Bat-sheer. I. **Ratio and proportion**. sense publishers.
- Clapham, Christopher; Nicholson, James; Concise Oxford dictionary of mathematics. Fourth Edition, 2009, p 639.